

Distribución
uniforme
continua

$X \sim \text{unif}(a, b) \rightarrow X$ tiene una distribución
uniforme continua en el
intervalo (a, b)

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)} \text{ para } x \in (a, b)$$

Parámetro: $a < b$

Media: $(a+b)/2$

$$\text{Varianza: } \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Distribución
exponencial

$X \sim \text{exp}(\lambda) \rightarrow X$ tiene una distribución exponen-
cial con parámetro $\lambda > 0$.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ para } x > 0$$

Parámetro: $\lambda > 0$

Media: $1/\lambda$

$$\text{Varianza: } 1/\lambda^2$$

* Distribución Normal: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow X$ tiene una distribución
normal con parámetros
 μ y σ^2 → varianzas

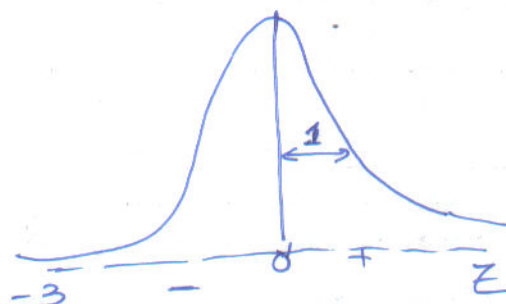
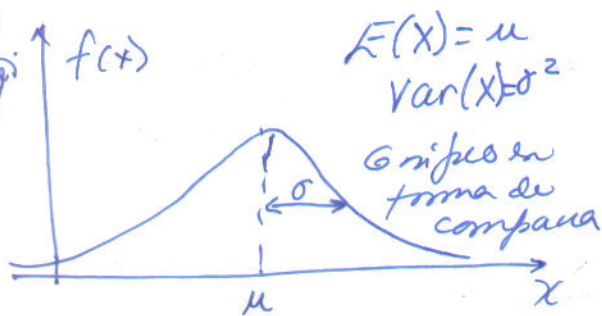
Se dice q' una v. a. continua X tiene una distribución normal
si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2/2} \quad (-\infty < z < \infty)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son 2 parámetros.

usualmente solo
se trabaja con la media
y la varianzas (aunque
para probarse).



En particular decimos q' la variable aleatoria X tiene una
distribución normal estándar si tiene una distribución normal con
parámetros $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$. En este caso la función de densidad se
reduce a la expresión $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$

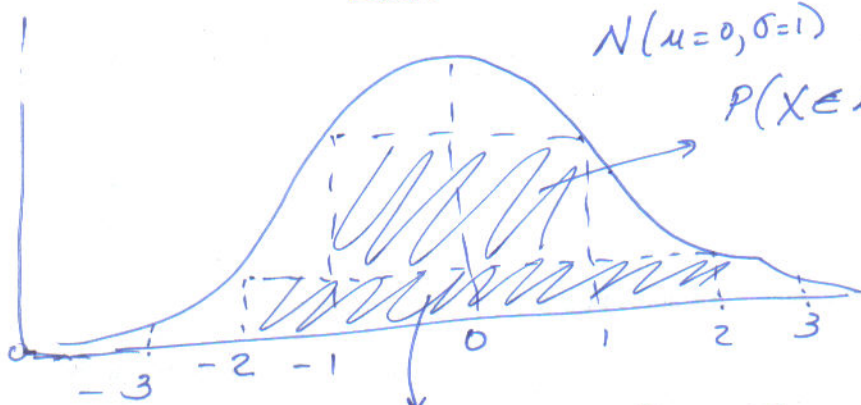
Es posible transformar una v.a. normal no estándar en una estándar:

Proposición: Sea X una v.a. con distribución normal con parámetros μ y σ^2 . Entonces la ~~se~~ v.a. tiene una distribución normal estándar:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

→ Estandarizar (bajo tal transformación se dice q' la variable X ha sido estandarizada. Así se comprueba que $E(Z) = 0$ y $Var(Z) = 1$

Dist. normal: μ indica posición de la campana (parámetro de centralización (centro))
 σ^2 (o equivalentemente σ): parámetro de dispersión. Cuanto ~~mayor sea~~ menor sea, mayor cantidad de masa de probabilidad habrá concentrada alrededor de la media (grupo de f muy apuntado cerca de μ) y cuanto > sea más aplastado estará.



$$N(\mu=0, \sigma=1)$$

$P(X \in \mu \pm \sigma) = 0.68$ → probabilidad del 68%

$P(X \in \mu \pm 2\sigma) = 0.95$ → probabilidad del 95% a 2 desviaciones

Teorema Central del límite:

Sea $X_1, X_2, \dots$ una sucesión infinita de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza infinita σ^2 . Entonces la función de distribución de la variable $Z_n = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n) - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$

tendrá a la distribución normal estándar como límite a infinito, sin importar la distribución de la variable de la

$$o bien \quad P(A+B) = P(A) + P(B)$$

curva, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F_2(x).$$

Propiedades de la distribución normal:

- 1- Tiene una única moda, g' coincide con su media y su mediana.
- 2- La curva normal es simétrica al eje de las abscisas. Por ello cualquier valor entre $-\infty$ y $+\infty$ es teóricamente posible. El área total bajo la curva, por tanto, es igual a 1.
- 3- Es simétrica con respecto a su media μ . Según esto, para este tipo de variable existe una probabilidad de un 50% de observar un dato $> g'$ la media y un 50% de observar un dato menor.
- 4- La distancia de la línea trazada en la media y el pto de inflexión de la curva es igual a 1 desviación típica (σ). Cuanto mayor sea σ , más aplanada será la curva de la densidad.
- 5- El área bajo la curva comprendida entre los valores situados aproximadamente a 2 desviaciones estándar de la media es igual a 0.95. En concreto, existe un 95% de posibilidades de observar un valor comprendido en el intervalo $(\mu - 1.96\sigma, \mu + 1.96\sigma)$.
- 6- La forma de la campana de Gauss depende de los parámetros μ y σ . La media indica la posición de la campana, de modo que si dif. valores de μ la gráfica se desplaza a lo largo del eje horizontal. Por otra parte la desviación estándar determina el grado de apuntamiento de la curva: cuanto $>$ sea el valor de σ más se dispersarán los datos en torno a la media y la curva será + plana; un valor + pequeño de este parámetro indica una gran probabilidad de obtener datos cercanos al valor medio de la distribución.

Distribución Ji-cuadrada: $\chi^2(n) \rightarrow$ la variable aleatoria continua X tiene una distribución Ji-cuadrada con n grados de libertad (n entero positivo)

Su función de densidad es: $f(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} x^{n/2-1} e^{-x/2}$ para $x > 0$

Caracteres de la función de distribución normal:

- $f(x)$ está definida sobre todo $\mathbb{R}$.

- $f(x)$ es simétrica respecto a μ .

- $f(x)$ tiene un máximo en μ y es igual a $f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

- $f(x)$ tiende a 0 cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$, o sea $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ y

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

- $f(x)$ tiene puntos de inflexión en $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$.

Parámetro: $n > 0$

media: n

Varianza: $2n$.

Distribución t de Student: $X \sim t(n) \rightarrow$ La variable aleatoria continua X tiene una distribución t con n grados de libertad

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi} \Gamma(n/2)} \cdot (1 + x^2/n)^{-(n+1)/2} \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

Parámetro: $n > 0$

media: 0

Varianza: $n/(n-2)$; para $n > 2$.

||

||

Función de probabilidad conjunta) Función de densidad conjunta:

Vectores aleatorios discretos

$$f(x, y) = P(X=x, Y=y)$$

Vectores aleatorios continuos:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x, y) &\geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy &= 1 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \forall x, y \quad f(x, y) &\geq 0 \\ \sum_{x, y} f(x, y) &= 1 \end{aligned}}$$

Función de densidad marginal:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Función marginal

$$f(x) = \sum_y f(x, y)$$

$$f(y) = \sum_x f(x, y)$$

X, Y son variables aleatorias independientes.

$$\equiv f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$$